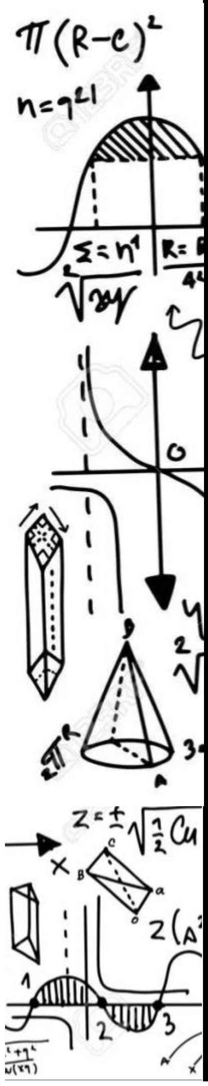


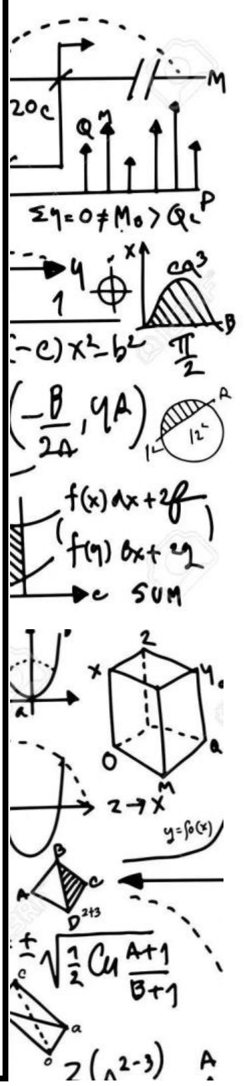
دیفرانسیل

به زبون آدمیزاد 😁

mojyam | مجتبی احمدی

Version : AZAR 1402

First & second order only



قوانین زیر رو اجرا نکنی، چیزی گیرت نمیاد :

- هرچیزی رو متوجه نشدی لطفا ردش نکن، دوباره بخونش!
- عجله نکن، نگرانِ زیاد بودنش نباش؛ یادت باشه تو میتونی یه فیل رو بخوری اما قاشق قاشق
- **هنری فورد :** چه بگی میتونم، چه بگی نمیتونم، در هر دو صورت حق با توئه![1]
- تو کف تکنیک های خفن نباش، مطالب پایه رو زیاد بخون؛ بروسلی میگه : کسی که هزار ضربه رو یکبار تمرین کرده هیچ، من از کسی می‌ترسم که یک ضربه رو هزاربار تمرین کرده باشه...

[1] دوباره بخونش و بهش فکر کن...

دیفرانسیل چیه دقیقا؟!

ببین اگه تو یه معادله **مشتق** دیدی، اون معادله دیفرانسیل هستش!

مثلا) $Y = X^2 + 2$ معادله هست اما دیفرانسیل نیست

مثلا) $Y^3 - X = 3$ آفرین، اینم معادله دیفرانسیل نیست

مثلا) $Y' + X = 3$ دقیقا، این معادله دیفرانسیل هستش

مثلا) $Y'' = 7X - 4$ اینم یه معادله دیفرانسیل هستش چون توش مشتق داره

مثلا) $Y' = 4$ اینم معادله دیفرانسیل هستش

تو معادله دیفرانسیل دقیقا دنبال چی می‌گردیم؟

دنبال یه تابعی مثل Y می‌گردیم که داخل معادله جور در بیاد. (صدق کنه)

مثال آخری بالا رو نگاه کن، دنبال تابعی میگردیم که اگه ازش مشتق بگیریم بشه 4

حالا خودت هم میتونی حدس بزنی که اگه جاش Y = 4X بزاری درست میشه، چون اگه ازش مشتق بگیری میشه 4

پس معادله رو حل کردیم😊، جوابش میشه تابع Y = 4X

اما همیشه به این آسونیا نیست، مثال های زیر رو نگاه کن، میتونی بگی جوابش چه تابعی هستش؟ زرشک 😆

به خاطر همین اینجا قراره روش هایی یاد بگیری که به جای حدس زدن، میتونی سریع به جواب برسی.

به بیشترین مرتبه مشتقی که داخل معادله هست، میگیم مرتبه معادله دیفرانسیل

مثلا) $Y'' + 2X = 4$ مرتبه 2 | $X^2 - 2Y' = 0$ مرتبه یک

مثلا) $Y'' + Y' = 2X$ مرتبه 2 درسته که مشتق اول داره ولی بیشترینش مشتق دومه

مثلا) $X^4 + Y' + 3Y^5 + 2Y^{(3)} - 3 = 0$ مرتبه 3 ؛ دقت کن ما با توان کاری نداریم، با X هم کاری نداریم، فقط بیشترین مرتبه مشتق تابع Y که در واقع خودش تابعی از X هستش.

میتونیم هم مشتق داشته باشیم و هم توان؛ بیشترین توانِ بالاترین مرتبه، درجه رو میده

مثلا) $Y'^3 + 2Y + X = 0$ معادله دیفرانسیل مرتبه یک و درجه سه

مشتق های بیشتر رو مثل توان مینویسی بالا ولی باید یه پرانتز هم براش بزاری[2]

مثلا) $Y^{(3)}$ یا $Y^{(5)}$ مشتق های سوم و پنجم

مثلا) $Y^{(4)3}$ مشتق مرتبه چهار به توان سه (همون درجه سه)

دو نوع معادله دیفرانسیل وجود داره : **خطی** و **غیرخطی**

ما فقط رو خطی هاشون کراش می‌زنیم😄، ببخشید فقط با خطی ها کار داریم.

حالا **خطی** یعنی چی؟!

دو تا شرط داره که اگه رعایت بشه، اون معادله میشه خطی، همین 😁

اولا) تابعی که دنبالش میگردیم (همون Y) نباید تو خودش و مشتق هاش ضرب شده باشه (پس اگه توان داشته باشه خطی نیست)

دوما) تابعی که دنبالش میگردیم (همون Y)، خودش و مشتق هاش، متغیرِ هیچ تابعی نباشن.

میدونم گیج شدی پس مثال های پایین رو ببین...

مثلا) $\sin(Y) + Y' = X$ غیرخطیه، چون Yمتغیر تابع سینوس شده

مثلا) $Y^2 + Y" = 3$ غیرخطیه، چون تابعی که دنبالشیم توان داره

مثلا) $X^2 + Y' = 3$ خطیه، چون Y نه توان داره نه متغیر تابع دیگه‌ایه

مثلا) $Y" + 6Y' + \sin(x) = 0$ خطیه، به دلیل بالایی☝

یه معادله دیفرانسیل دو جور جواب داره : **عمومی** و **خصوصی**

حالا جواب عمومی چی‌چیه؟!

بیا یه مثال ساده بزنیم، به نظرت تو معادله $Y' = 2X$ ، تابع Y چی میتونه باشه؟

آفرین میتونه X^2 باشه، چون ازش مشتق بگیریم میشه 2X

اما به نظرت $X^2 + 3$ هم درست نیست؟ دقیقا اینم میتونه جواب باشه، خب حالا $X^2 + 999$ چطور؟ بازم درسته چون مشتقش میشه 2X

پس دیدی چقدر جواب های مختلف داره، یه جورایی هرعددی بزاری، چون مشتقِ عدد صفره پس جواب درسته پس کلا میگیم جوابش میشه $Y = X^2 + C$ که هر عددی میتونه باشه.

---

[2] ببین Y تابعی هستش که دنبالشیم، تو میتونی جاش f یا هر حرف دیگه ای بزاری، مهم مفهومشه Y = f(x)

به این میگن جواب عمومی چون یدونه نیست حالا اگه بهش عدد بدی مثلا بشه $X^2 + 4$ ، به این میگن جواب خصوصی چون مثل خودت😍 فقط یدونه است.

نتیجه گیری : از جواب عمومی میتونی **بی‌نهایت** جواب خصوصی در بیاری که بعدا تو مثال ها بیشتر متوجه میشی.

چجوری معادلات مرتبه اول رو حل کنیم؟!

میدونی دیگه مشتق رو به شکل 'Y یا $\frac{dY}{dx}$ نشون میدن.

باید اینو بدونی که چون انتگرال، برعکس مشتق هستش پس $\int \left(\frac{dy}{dx}\right)$ میشه همون Y ، که تو حل همه معادلات مرتبه اول کمکت می‌کنه.

معادلات جداشدنی

تو اینجور معادله ها، همه x ها و dx رو می‌بریم یه طرف، همه y ها و dy رو هم می‌بریم یه طرف...

بعدش از دو طرف انتگرال می‌گیریم؛ کار تمومه ، تا اینجا جواب عمومی رو به دست آوردی.

حالا مقداری که خودش داده رو قرار میدی تا جواب خصوصی رو هم گیر بیاری

اول مثال رو ببین بعد برگرد دوباره اینجارو بخون😂

مثلا) **معادله دیفرانسیل** $\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2+2x}{2y}$ رو با شرط $y(0) = 1$ حل کن.

حل) اول مرتب سازی با طرفین وسطین ☜ $2y\,dy \;=\; (3x^2 + 2x)dx$

حالا چون هر دو طرف dx و dy داری میتونی انتگرال بگیری ☜ $\int 2y\,dy = \int (3x^2 + 2x)dx$

جواب هاشون میشه ☜ $y^2 \;=\; (x^3 + x^2 + c)$ همیشه سمت x یه c می‌مونه که اگه جواب خصوصی میخوای باید شرط سوال رو اجرا کنی، یعنی y(0) = 1

پس ☜ $(1)^2 \;=\; (0)^3 + \;(0)^2 + \;c$ که میشه c = 1

خب ما دنبال y بودیم دیگه، چون y توان دو هم داره پس رادیکال هم از دو طرف می‌گیریم.

جواب خصوصی میشه $y = \sqrt{}(x^3 + x^2 + 1)$

چک کن ببین میشه همه x و dx ها برن یه طرف و y ها و dy ها هم یه طرف دیگه، اگه شد به روش بالا حلش کن و y رو گیر بیار.

معادلات خطی

فرم کلی مرتبه اول خطی اینجوریه $y' + \;p(x)\,y \;=\; q(x)$

در واقع p و q تابع هایی از x اند که میتونن عدد هم باشن.

مثلا) $y' + 2xy \;=\; 3x$ قیافه سوال داد می‌زنه معادله خطی مرتبه اوله😁

برای حل، اول اینو به دست میاری $A = e^{\int p(x)\,dx}$ (عدد نپر به توان انتگرال ضریب خود y که همون p(x) هستش.)

اینو تو کل معادله ضرب میکنی، اینجوری $\mathrm{A}y' + \mathrm{Ap(x)y} = \mathrm{Aq(x)}$

حالا طرف چپ رو می‌بندی، یعنی به شکل مشتق یه چیزی مینویسیش، اینجوری $\frac{\mathbf{d(Ay)}}{\mathbf{dx}}$ که اگه ازش مشتق بگیری میشه همون بالایی...

دو طرف رو در dx ضرب میکنی (که dx تو چپیه از بین بره) و از طرف راست انتگرال میگیری.

اول شاخ مثال پایینو بشکنیم، بعد متن بالا رو دوباره بخون...

مثلا) برو تو نخ این سوال $y' + 2y = x$

حل) اول A رو حساب میکنی، $A = e^{\int 2dx} = e^{2x}$ ، خب حالا تو معادله ضربش می‌کنیم.

اینجوری☜ $e^{2x}y' + 2e^{2x}y = e^{2x}x$

حالا طرف چپ رو می‌بندیم $\frac{d(e^{2x}y)}{dx} = e^{2x}x$

حالا دو طرف رو در dx ضرب میکنیم و انتگرال می‌گیریم (سمت چپ، انتگرالش با d که همون مشتقه، خنثی میشه پس خودش رو می‌نویسیم) $e^{2x}y = \int e^{2x}x\,dx$

جواب انتگرال رو میگیری و y رو تنها میکنی و تمام! $\boldsymbol{y = \frac{x}{2} + \frac{c}{e^{2x}} - \frac{1}{4}}$

دقت کن که عبارت وسطی خودش یک عدد ثابته که میتونی مثلا d بگیریش، پس جواب میشه ☜ $y = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} + d$

اوستا قبل از اینکه رد کنی، مثال های دیگه ای حل کن تا مطمئن بشی گرفتی چی میگم!!

یادآوری : ما تابعی رو به دست آوردیم که تو معادله اصلی صدق می‌کنه، اگه شک داری بزارش ببین جور در میاد؟

معادلات همگن

تابع همگن چیه؟ اگه بتونی جای متغیر های x و y یه تابع، tx و ty بزاری و t و خود تابع اصلی رو سالم بکشی بیرون، اون تابع همگن هستش. (مرتبه همگن بودنش هم توان t هستش)

مثلا) تابع $x^2 + xy$ همگنه، چون‌که $(tx)^2 + (tx)(ty) = t^2(x^2 + xy)$ پس خود تابع و t تفکیک شدند و سالم بیرون اومدند و چون t توان دو داره، همگن مرتبه دو هستش.

معمولا اول تابع رو این‌شکلی بهت میده $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ حالا هر دوتا تابع M و N رو چک میکنی، اگه جفت شون همگن (و هم مرتبه) بودند، با روش زیر حلش میکنی...

اول تغییر متغیر میدیم : $z = \frac{y}{x}$ پس میشه گفت $y = zx$ و $\frac{dy}{dx} = y' = z'x + z$

اگه یادت نمیاد **مشتق ضرب** میشه ☜مشتق اولی در دومی + مشتق دومی در اولی

بعد معادله رو به شکل $\frac{dy}{dx} = -$ می‌نویسی و جایگذاری میکنی، فقط با x ها کاری نداشته باش، y هارو تغییر متغیر بزن.

در نهایت تمام z و dz یه طرف و y و dy ها یه طرف و از دو طرف انتگرال میگیری.

فقط آخرش z رو برگردون به حالت اول.

خب جنتل‌من، اول مثال زیر رو ببین بعد دوباره برگرد اینجا رو بخون...

مثلا) جواب اینو $(x+y)dx-(x-y)dy=0$ رو اِخ کن😆

حل) اولا به فرم استاندارد کسری درش میاریم، اینجوری $\frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{x-y}$

حالا تغییر متغیر میدیم، که اینا بود $y=zx$ و $\frac{dy}{dx}=y'=z'x+z$

خب جایگذاری کنیم $z'x+z=\frac{x+zx}{x-zx}$ و خب از x ها فاکتور بگیر ساده کن

$z'x+z=\left(\frac{x(1+z)}{x(1-z)}\right)=\frac{1+z}{1-z}$ خب حالا همه z و dz یه طرف و x ها هم همین طور؛ قبلش اینم میدونی که $z'=\frac{dz}{dx}$

$\frac{dz}{dx}x=\frac{1+z}{1-z}-z$ ساده کاری کنیم $\frac{1}{x}dx=\frac{1-z}{1+z^2}dz$ و از دو طرف انتگرال می‌گیریم که لطفا خودت انجامش بده و بعد جواب رو نگاه کن $\ln(\mathrm{x})+\mathrm{c}=\tan^{-1}(z)-\frac{ln(1+z^2)}{2}$

بازم میگم سمت x ها همیشه برات یه c هم داره به عنوان عدد ثابت، الان فقط کافیه تغییر متغیر رو درست کنی، یعنی $z=\frac{y}{x}$ پس $\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)-(\frac{ln\left(1+\left(\frac{y^2}{x^2}\right)\right)}{2}=\ln(x)+c.$

کار تمومه، هلو بپر تو گلو...😋

خب حاجی یه سوال : اگه یه وقت فهمیدیم معادله همگن نیست، اون وقت چی؟

جواب : خب شاید معادله کامل هستش.

کامل چی چیه؟! برو پایین👇

معادلات کامل

معادله $M(x,y)\ dx+N(x,y)\ dy=0$ رو یادته، اگه این شرط رو داشته باشه، بهش میگیم "کامل"

شرط کامل بودن : $\frac{dM}{dy}=\frac{dN}{dx}$ یعنی مشتق اونی که dx داره نسبت به y مساوی بشه با مشتق اونی که dy داره نسبت به x

اگه کامل بود، اینجوری حل میکنی : اول از M انتگرال میگیری ∫Mdx=A+c که یه عبارتی میشه با عدد ثابت

بعد از همون عبارت (یعنی A+c) نسبت به y مشتق بگیر و مساوی همون N قرارش بده، اینجوری $\frac{d(A+c)}{dy}=N$ که یه عبارت داری و 'c (چون مشتق گرفتی، دیگه خود c نیست)

از اینجا 'c رو گیر میاری و بعد انتگرالش رو (نسبت به y) میگیری و جواب نهایی همینه A+c

این قسمت آخر برای اینه که بتونیم c رو گیر بیاریم.

سه سوت یه مثال حل میکنیم و بعد بیا اینجا رو دوباره بخون☟

مثلا) معادله $e^{y}dx+(xe^{y}+2y)dy=0$ رو حل کن

حل) اول تست میکنیم ببینیم کامله یا نه $\frac{dM}{dy}=\frac{dN}{dx}$ که میشه $e^{y}=e^{y}$

پس کامله، دیگه تابلوئه اول از M نسبت به dx انتگرال میگیریم ∫Mdx=$xe^{y}+c$

حالا از همین نسبت به y مشتق می‌گیریم و مساوی N قرار میدیم که c رو گیر بیاریم، اینجوری ☜ $xe^{y}+c'=xe^{y}+2y$

پس $c'=2y$ و خود c هم میشه $\int c'dy=\int 2ydy=y^{2}=c$

پس جواب شد $xe^{y}+y^{2}$

نکته جالب : حالا اگه معادله "کامل" هم نبود، میتونی با یه قلقی کاملش کنی، یه چیزی توش ضرب می‌کنیم تا کامل بشه بعد بتونیم مثل بالا حلش کنیم، به این میگیم عامل انتگرال ساز (همونی که قراره ضربش کنی تو معادله تا کامل بشه)

یادآوری : اگه یادت بیاد برای حل خطی ها هم یه چیزی توش ضرب می‌کردیم، یادت میاد چی بود؟

عامل انتگرال ساز (کامل کردن معادلات غیرکامل)

خب از بالا به پایین به ترتیب هر کدوم کارت رو راه انداخت حله، اگه نه برو سراغ بعدیش...

قراره سمت **راست** رو حساب کنی اگه بر حسب چیزی بود که گفته شده، سمت **چپی** همون عامل انتگرال سازت میشه.

دقت کن وقتی مثلا میگه فقط بر حسب x یعنی یا عدد بمونه یا x و بقیه هم همین طوری...

$$\frac{M_y - N_x}{-M}$$

👉اگه اینو حساب کردی و کاملا برحسب y شد، سمت چپ رو حساب کن، عامل انتگرال سازت همینه👈

$$e^{\int \frac{M_y - N_x}{-M} dy}$$

اونی که زیروند نوشته شده، یعنی مشتق بر اساس اون بگیر، مثلا اولی میگه از M نسبت به y مشتق بگیر

عدد نپر به توان انتگرال عبارت سمت راستی بر اساس dy

$$\frac{M_y - N_x}{N}$$

👉اگه بالایی کاملا بر حسب y نشد، اینو حساب کن و اگه این کاملا برحسب x شد، سمت چپ رو حساب کن، عامل انتگرال سازت همینه👈

$$e^{\int \frac{M_y - N_x}{N} dx}$$

$$\frac{M_y - N_x}{Ny - Mx}$$

👉اگه دوتای بالا فقط بر حسب x یا y نشد، سمت راستی رو چک کن، اگه فقط بر حسب xy شد، عامل انتگرال سازت همینه👈

$$e^{\int \frac{M_y - N_x}{Ny - Mx} d(xy)}$$

ببین اگه مخرج رو به M یا N تقسیم کردی ولی برحسب یکی شون نشد، از این راه میری یعنی مخرج رو به (M×X)+(N×Y) تقسیم میکنی...

دقت کن که انتگرال رو بر اساس xy می‌گیری!

مثلا) معادله $(3xy + y^2)dx + (x^2 + xy)dy = 0$ رو حل کن.

حل) از مورد اولی بریم فقط بر حسب y نمیشه $\frac{\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}}{-M} = \frac{3x+2y-2x-y}{3xy+y^2} =$

$x+y$

پس سریع میریم سراغ دومی $\frac{\frac{dM}{dy}-\frac{dN}{dx}}{N}=\frac{3x+2y-2x-y}{x^2+xy}=\frac{x+y}{(x)(x+y)}=\frac{1}{x}$ خب حله تهش فقط بر حسب x شد، پس عامل انتگرال سازمون اینه $e^{\int\frac{1}{x}dx}=e^{\ln(\mathrm{x})}=\mathrm{x}$ خب حالا همینو تو معادله اصلی ضرب کنی، تبدیل میشه به معادله کامل که بتونی حلش کنی، روش حلش رو اگه یادت نیست برگرد بالا دوباره بخون؛ معادله این شد $(3x^2y+xy^2)dx+(x^3+x^2y)dy=0$

مطمئنی کامل شد؟ بیا تست کنیم $\frac{dN}{dx}=3x^2+2xy$ و $\frac{dM}{dy}=3x^2+2xy$ دیدی یکی شد..

مثلا) معادله کشکی $(y^3+xy^2+y)dx+(x^3+x^2y+x)dy=0$ رو حل کن.

حل) اگه از مورد اول و دوم بری بر حسب x و y خالی در نمیاد، پس از مورد سوم میریم (خودت حساب کن ببین چرا میگیم نمیشه)

پس $\frac{\frac{dM}{dy}-\frac{dN}{dx}}{Ny-Mx}=\frac{3y^2+2xy+1-3x^2-2xy-1}{yx^3+x^2y^2+xy-xy^3-x^2y^2-xy}=\frac{3(y^2-x^2)}{yx^3-xy^3}=\frac{3(y^2-x^2)}{xy(x^2-y^2)}=\frac{-3(x^2-y^2)}{xy(x^2-y^2)}=-\frac{3}{xy}$

خب عامل انتگرال ساز میشه این $e^{\int\left(\frac{-3}{xy}\right)dxy}=e^{-3(\ln xy)}=e^{\ln xy^{-3}}=xy^{-3}=\frac{1}{(xy)^3}=\frac{1}{x^3y^3}$

اگه اینو تو معادله اصلیه ضرب کنیم، کامل میشه و میتونیم به روش کامل حلش کنیم که دست خودتو می‌بوسه😁 ، این میشه $\left(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^2y}+\frac{1}{x^3y^2}\right)dx+\left(\frac{1}{y^3}+\frac{1}{xy^2}+\frac{1}{x^2y^3}\right)dy=0$

نکته : این سوالا خار نداره، جون هر کی دوست داری، مرحله مرحله بخون تا قاطی نکنی، دیفرانسیل همینجوریش زیاده، برا خودت سختش نکن...

یه راه دیگه هم برای پیدا کردن عامل انتگرال ساز هست، این که فرض کنیم این x^my^n باشه و تو معادله ضربش کنیم بعد شرط کامل بودن رو اجرا کنیم تا اون m و n مجهولش رو پیدا کنیم...

مثلا) عامل انتگرال ساز $(-3xy+2y^3)dx+(x^2+xy^2)dy=0$ رو پیدا کن.

حل) فرض کن عامل این باشه x^my^n

اگه اینو تو معادله ضرب کنیم کامل میشه

$$(-3x^{m+1}y^{n+1} + 2x^m y^{n+3})dx + (x^{m+2}y^n + x^{m+1}y^{n+2}) = 0$$

شرط کامل بودن $\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}$ 👇

$$(n+1)(-3x^{m+1}y^n) + (n+3)2x^m y^{n+2} = (m+2)x^{m+1}y^n + (m+1)x^m y^{n+2}$$

حالا ضرایب یکسان رو مساوی میزاریم، اینجوری 👇

$$(-3n-3)(x^{m+1}y^n) = (m+2)(x^{m+1}y^n) \gg -3n-3 = m+2$$

$$2(n+3)(x^m y^{n+2}) = (m+1)(x^m y^{n+2}) \gg 2n+6 = m+1$$

اگه این دو معادله دو مجهول رو حل کنی : m=1 و n=-2 پس عامل انتگرال ساز میشه این 👈 $x^m y^n = xy^{-2}$

معادلات برنولی

معادله خطی رو یادته؟ تهش یه y^n اضافه کن میشه برنولی $y' + p(x)y = q(x)y^n$

فقط اگه n=0,1 باشه، معادله مون خطی یا جداشدنی میشه، پس n صفر و یک نیست

برای حلش این تغییر متغیر رو می‌گیری $z = y^{1-n}$

تو تغییر متغیر y رو تنها میکنی بعد y' و y^n رو هم حساب می‌کنی میزاری تو معادله، میدونی بعدش چی میشه؟ تبدیل میشه به خطی، بعد راحت حلش میکنی...

مثلا) اینو یه نگاه بنداز $xy' + (1-x)y = x^2y^2$

معادله رو استاندارد میکنیم (ضریب y' باید یک باشه) $y' + \frac{1-x}{x}y = xy^2$

حالا تغییر متغیر $z = y^{1-n} = y^{1-2} = y^{-1}$ پس $y^2 = z^{-2}$ و $y' = -z^{-2}z'$ و $y = z^{-1}$

یعنی ما چیزایی که تو معادله نیاز داریم رو می‌سازیم.

👇
توان کنار، یه توان کم،
مشتق داخل

حالا معادله رو دوباره می‌سازیم👇

$$-z^{-2}z' + \left(\frac{1-x}{x}\right)z^{-1} = xz^{-2}$$

بازم استاندارد می‌کنیم (ضریب z' باید یک باشه دیگه) 👈 $z' - \left(\frac{1-x}{x}\right)z = -x$

تبدیل شد به **خطی** که بقیه شو بلدی...

💡**در "منفی z به توان 2" ضربش کردیم**

معادلات ریکاتی

بازم معادله خطی رو یادته با این تغییر میشه ریکارتی 👈 $y' + p(x)y = q(x)y^2 + r(x)$

نکته : تو برنولی y هر توانی داره ولی تو ریکارتی فقط توانش 2 هستش.

اگه توان y دو بود ریکاتیه؟ نه یه r(x) اضافی هم داره که میتونه تابع باشه یا عدد

یادت باشه که همیشه بهت یه جواب خصوصی معادله رو میده، بعد با این تغییر متغیر میتونی حلش کنی $y = z + y(s)$ یا همون 👈 $y = z +$ جواب خصوصی

ترتیب حل : تغییر متغیر >> تبدیل به برنولی >> تبدیل به خطی

مثلا) معادله $y' = -x^5 + \frac{y}{x} + x^3y^2$ رو با جواب خصوصی y=x حل کن.

حل) از رو قیافه که نمی‌فهمیم، اول استاندارد کنیم $y' - \frac{y}{x} = x^3y^2 - x^5$

الان معلوم شد ریکاتیه، تغییر متغیر $y = z + x$ پس $y' = z' + 1$ و $y^2 = (z+x)^2$

بازسازی کنیم $z' + 1 + \left(-\frac{1}{x}\right)(z + x) = x^3(z + x)^2 - x^5$

بازش می‌کنیم و ساده کاری $z' - \frac{z}{x} - 2x^4z = x^3z^2$ پس $z' - \left(\frac{1}{x} + 2x^4\right)z = x^3z^2$

حالا این برنولی شد، تغییر متغیر $u = z^{1-n} = z^{-1}$ پس $z = u^{-1}$

اینارو هم نیاز داریم بسازیم $z' = -1u^{-2}u'$ و $z^2 = u^{-2}$

دیگه بلدی، جایگذاری کن $-u^{-2}u' - \left(\frac{1}{x} + 2x^4\right)u^{-1} = x^3u^{-2}$

استاندارد میکنیم $u' + \left(\frac{1}{x} + 2x^4\right)u = -x^3$

میدونم خسته شدی، واسه خودت یه نوشابه باز کن😂؛ این الان خطی شده، حلش میکنی، فقط یادت باشه ما دنبال y بودیم پس وقتی u رو پیدا کردی تبدیلش کن.

یعنی $y = z + x$ و $u = z^{-1}$

چجوری معادلات مرتبه دوم رو حل کنیم؟!

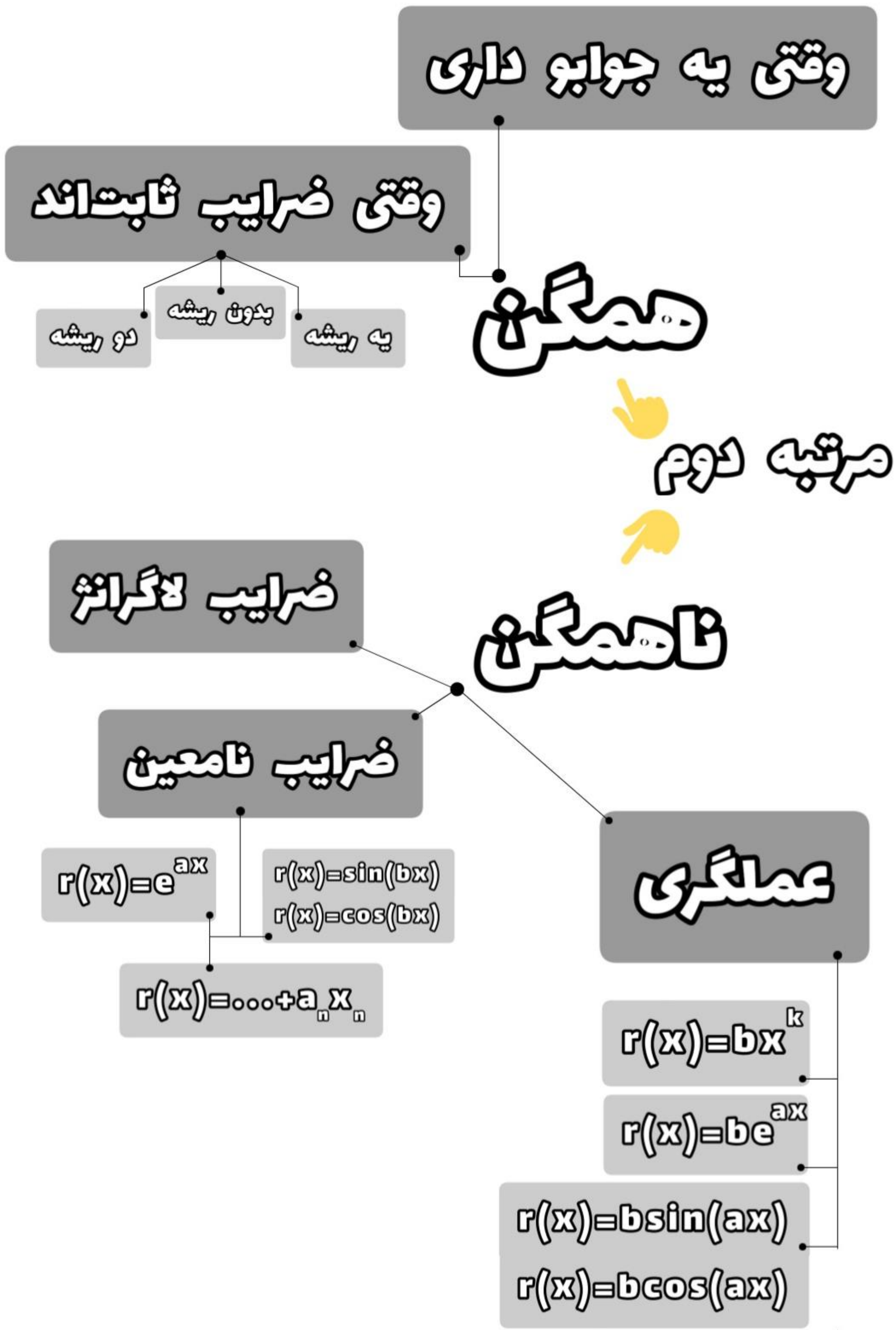
تیپ کلیش اینه $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$

اگه r(x)=0 بهش میگیم همگن (یعنی طرف راست صفر بشه)؛ اگه صفر نباشه، میشه ناهمگن

همگن ها بهت معمولا دو تا جواب میدن (چون مستقل خطی اند که برای ما مهم نیست)

که شکل کلی جواب اینجوری میشه 👈 $Y = C_1y_1 + C_2y_2$

یعنی دو تا y که گیر میاری رو با دوتا ضریب c مینویسی که میشه جواب (چون c ها هر عددی میتونن باشن و جواب درسته)



حالا میریم دونه دونه به زبون ساده یاد بگیریم :

معادلات همگن | وقتی یه جوابو داری

یادت بیاد مرتبه دوم ها کلا دوتا y بهمون میدن، اگه یکیشو بهت بده میتونی اون یکی رو اینجوری گیر بیاری $Y_2=VY_1$ و $V=\int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y^2}$ (مخرج همونیه که سوال داده بهت)

مثلا) اگه y=x یه جواب معادله $x^2y''+xy'-y=0$ باشه، جواب کلی رو به دست بیار.
معادله مرتبه دو هستش و یه جواب رو داده؛ اولا استاندارد کن بعد حل

$$y_2=vy_1 \quad v=\int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2}dx=\int \frac{e^{-\int \frac{1}{x}dx}}{x^2}=\int \frac{1}{x^3}=\frac{-1}{2x^2}$$

$$y_2=\left(\frac{-1}{2x^2}\right)(x)=\frac{-1}{2x} \quad y(x)=c_1y_1+c_2y_2 \Rightarrow c_1x-\frac{c_2}{2x}$$

معادلات همگن | ضرایب ثابت

این حالتیه که جوابی بهت نداده ولی ضریب ها فقط عدد اند؛ اول مرتبه مشتق رو با توان جایگزین می‌کنی، مثلا مشتق دوم رو توان دوم یه عبارت در متغیر می‌نویسی

مثل این $y''=m^2y$ و معادله درجه دو رو حل میکنیم (به روش دلتا)

$\Delta>0$ دو ریشه r_1 و r_2 داره

$y_1=e^{r_1x}$
$y_2=e^{r_2x}$

$\Delta=0$ یه ریشه (r_1) داره
ریشه دوم با فرمول V گیر میاد

$y_1=e^{r_1x}$

در حالت دلتا صفر، ریشه دوم با همون حالتی به دست میاد که گفتیم "وقتی یه جوابو داری"

$\Delta<0$ دو ریشه r_1 و r_2 داره که به صورت $a\pm bi$ نوشته میشه

$y_1=e^{ax}\cos(bx)$
$y_2=e^{ax}\sin(bx)$

مثلا) برو تو کف این معادله $y''+y'-6y=0$

$$y''+y'-6y=0 \longrightarrow m^2+m-6=0 \xrightarrow{\Delta} m=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} \longrightarrow m_1=-3,\quad m_2=2$$

$$y_1=e^{-3x} \text{ و } y_2=e^{2x} \longrightarrow y(x)=c_1e^{-3x}+c_2e^{2x}$$

مثلا) معادله $y''+2y'+y=0$ رو حل کن.

$$y''+2y'+y=0 \longrightarrow m^2+2m+1 \xrightarrow{\Delta} b^2-4ac=0 \longrightarrow m=\frac{-b}{2a}=\frac{-2}{2}=-1$$

$$y_1=e^{-x} \longrightarrow y_2=vy_1 \text{ و } v=\int\frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2}dx=\int\frac{e^{-\int 2dx}}{e^{-2x}}dx=\int\frac{e^{-2x}}{e^{-2x}}dx=\int 1\,dx=x$$

$$y_2=vy_1=xe^{-x} \longrightarrow y(x)=c_1y_1+c_2y_2=c_1e^{-x}+c_2xe^{-x}$$

مثلا) آویزون این معادله شو $y''+8=0$

$$y''+8=0 \longrightarrow m^2+8=0 \xrightarrow{\Delta} m=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{0\pm4\sqrt{2}i}{2}=\pm2\sqrt{2}i=a+bi$$

$$\sqrt{\Delta}=\sqrt{b^2-4ac}=\sqrt{-32}=\underbrace{\sqrt{-1}}_{i}\sqrt{32}=4\sqrt{2}i$$

$a=0$

$b=\pm2\sqrt{2}$ مثبت رو برمی‌داریم

$$y_1=e^{ax}\cos bx=e^{(0)x}\cos(2\sqrt{2}x)=\cos(2\sqrt{2}x)$$

$$y_2=e^{ax}\sin bx=e^{(0)x}\sin(2\sqrt{2}x)=\sin(2\sqrt{2}x)$$

$$y(x)=c_1y_1+c_2y_2=c_1\cos(2\sqrt{2}x)+c_2\sin(2\sqrt{2}x)$$

هر جا Δ منفی شد، مثل معادله Δ مثبت حلش کن فقط بدون که $\sqrt{-1}=i$ و آخرش $a+bi$

کلا یادت باشه : برای حل ناهمگن ها، اول باید به صورت همگن حلش کنی، یعنی سمت راست رو صفر میزاری و حل میکنی.

جواب آخر معادله، جواب همگن + جوابیه که از ناهمگن گیر میاری، یعنی اینجوری

$$y(x) = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \boxed{\text{جواب ناهمگن}}$$

معادلات ناهمگن | ضرایب لاگرانژ (تغییر پارامتر)

جواب کلی این روش اینه 👇

$$y(x)=c_1 y_1 + c_2 y_2 + v_1 y_1 + v_2 y_2$$

خب حالا 'V' ها چین؟!

$$v_1=\int\frac{-y_2 R(x)}{W(y_1,y_2)}dx \quad \text{و} \quad v_2=\int\frac{y_1 R(x)}{W(y_1,y_2)}dx$$

$$W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \xrightarrow{\det} y_1 y_2' - y_2 y_1' \quad \text{رونسکین دو تابع}$$

منظور از W همون رونسکین هستش که برات نوشته چیه

R(x) چیه؟ همون سمت راست که ناهمگنش کرده دیگه

مثلا) معادله $y'' + y = \csc(x)$ رو حل کن.

اول به صورت همگن =>

$$y''+y=0 \longrightarrow m^2+1=0 \xrightarrow{\Delta} m=\pm i \Rightarrow \begin{array}{l} y_1=\cos x \\ y_2=\sin x \end{array}$$

$$W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix} \cos & \sin \\ -\sin & \cos \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \qquad R(x)=\csc x=\frac{1}{\sin x}$$

$$v_1=\int\frac{-y_2 R(x)}{W(y_1,y_2)}dx=\int\frac{-\cancel{\sin}\left(\frac{1}{\cancel{\sin}}\right)}{1}dx=-x$$

$$v_2=\int\frac{\cos\left(\frac{1}{\sin}\right)}{1}dx=\ln(\sin x)$$

$$y(x)=c_1 y_1+c_2 y_2+v_1 y_1+v_2 y_2=c_1\cos x+c_2\sin x-x\cos x+\sin x\ln(\sin x)$$

ناهمگن | ضرایب نامعین

اینجا سه مدل R(x) داریم (همون طرف راست معادله) که هر شکلی بودن، یه y فرضی شبیه خودشون درست می‌کنی، آخرش همون y رو پیدا میکنی و تامام تامام...

انقدر ساده است که فقط کافیه مثال هارو دنبال کنی، قراره دو طرف رو مساوی بزاریم...

اگه $\mathbf{R(x) = e^{ax}}$ **اینو بساز** $\mathbf{y = Ae^{ax}}$

مثلا) معادله $y'' - 3y' + 2y = 3e^{3x}$ رو حل کن.

اول به صورت همگن => $y''-3y'+2y=0 \xrightarrow{\Delta} y_1=e^{x}$ و $y_2=e^{2x}$

حالا می‌سازیم => $y=Ae^{3x} \longrightarrow y'=3Ae^{3x} \longrightarrow y''=9Ae^{3x}$

بازسازی => $9Ae^{3x}-9Ae^{3x}+2Ae^{3x}=2Ae^{3x}=3e^{3x} \longrightarrow A=3/2$

$y_p=\frac{3}{2}e^{3x}$ $\qquad y(x)=c_1e^{2x}+c_2e^{3x}+3/2\,e^{3x}$

اگه $\boldsymbol{R(x) = \sin(bx)}$ **اینو بساز** $\boldsymbol{y = A\cos(bx) + B\sin(bx)}$

مثلا) معادله $y'' - 3y' + 2y = 3\sin(2x)$ رو حل کن.

اول به صورت همگن => $y''-3y'+2y=0 \xrightarrow{\Delta} y_1=e^{x}$ و $y_2=e^{2x}$

حالا می‌سازیم =>

$y=A\cos(2x)+B\sin(2x) \longrightarrow y'=-2A\sin(2x)+2B\cos(2x) \longrightarrow$

$y''=-4A\cos(2x)-4B\sin(2x)$

بازسازی => $-4A\cos(2x)-4B\sin(2x)+6A\sin(2x)-6B\cos(2x)+$

$2A\cos(2x)+2B\sin(2x)=3\sin 2x$

$(-4A-6B+2A)\cos(2x)+(-4B+6A+2B)\sin(2x)=3\sin(2x)$

$$\begin{cases}-2A-6B=0 \\ 6A-2B=3\end{cases}$$

چون طرف راست cos نداریم پس ضریبش صفره ←

برای sin هم ←

با حل دو معادله دو مجهول => $A=9/20$ و $B=\frac{-3}{20}$

$y(x)=c_1e^{x}+c_2e^{2x}+\frac{9}{20}\cos(2x)-\frac{3}{20}\sin(2x)$

دقت کن که فرق نداره میتونی y رو اینم بگیری $y = Asin(bx) + Bcos(bx)$

اگه $R(x) = a0 + a1x + \cdots + anx^n$ اینو بساز $y = A0 + A1x + \cdots + Anx^n$ تا بزرگترین توان بساز

مثلا) معادله $y'' - 3y' + 2y = 4x^3 - 2x + 1$ رو حل کن.

اول به صورت همگن => $y'' - 3y' + 2y \xrightarrow{\Delta} y_1 = e^x , y_2 = e^{2x}$

حالا می‌سازیم ←

$$y_p = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D \longrightarrow y' = 3Ax^2 + 2Bx + C$$

$$y'' = 6Ax + 2B$$

بازسازی => $6Ax + 2B - 9Ax^2 - 6Bx - 3C + 2Ax^3 + 2Bx^2 + 2Cx + 2D = 4x^3 - 2x + 1$

$$(2A)x^3 + (-9A + 2B)x^2 + (6A - 6B + 2C)x + (2B - 3C + 2D) = 4x^3 - 2x + 1$$

ضریب ها رو مساوی می‌زاریم =>

$2A = 4 \rightarrow \boxed{A = 2}$

$-9A + 2B = 0 \rightarrow \boxed{B = 9}$

$6A - 6B + 2C = -2 \rightarrow \boxed{C = 20}$

$2B - 3C + 2D = 1 \longrightarrow D = \frac{43}{2} = 21.5$

پس => $y_p = 2x^3 + 9x^2 + 20x + \frac{43}{2}$

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + 2x^3 + 9x^2 + 20x + \frac{43}{2}$$

ناهمگن | عملگری

اولا اینجا ما به جای مشتق، عملگرش رو می‌نویسیم مثل بخش "ضرایب ثابت" که یادت بیاد جای مشتق **m** میذاشتیم، حالا D میذاریم، فرقی نداره که...

بعد y رو تنها میکنیم و باید چند تا بسط تیلور رو حفظ باشی :

$$\frac{1}{1+D^2} = 1 - D^2 + D^4 - \cdots$$

$$\frac{1}{1-D^2} = 1 - D^2 + D^4 - \cdots$$

$$\frac{1}{1-D} = 1 + D + D^2 + D^3 + \cdots$$

معادلات این شکلی میشن دیگه $D^n y = R(x)$

که اگه y رو تنها کنیم $\frac{1}{D^n} R(x) = y$

حالت های مختلفی که میتونی اینو حل کنی رو بررسی میکنیم :

اگه R(x) چند جمله ای معمولی باشه) خب بسط تیلور تا زمانی که به توانش برسیم ادامه میدیم بعد عملگر رو لحاظ میکنیم (یعنی مشتق می‌گیریم)

مثلا) معادله $y''+4y=x^3+3x-1$ رو حل کن.

اول به صورت همگن =>

$$y''+4y=0 \xrightarrow{\Delta} y_1=\cos(2x) \text{ و } y_2=\sin(2x)$$

$$(D^2+4)y=x^3+3x-1 \longrightarrow \frac{1}{(D^2+4)}(x^3+3x-1)=y$$

$$\frac{1}{D^2+4}=\frac{1}{4}\underbrace{\frac{1}{(\frac{D^2}{4}+1)}}$$

چون برای تیلور باید به اضافه یک شده باشه.

$$\frac{1}{4}\frac{1}{(\frac{D^2}{4}+1)}=\frac{1}{4}\left[1-\frac{D^2}{4}+\frac{D^4}{16}\right]$$

این بسط تیلوره تا نزدیک بیشترین توان چندجمله ای (توان ۳ x)

$$\underbrace{\frac{1}{4}\left[x^3+3x-1-\frac{3x}{2}\right]}=y \longrightarrow y=\frac{x^3}{4}+\frac{3x}{8}-\frac{1}{4}$$

بسط تیلور رو توی $R(x)$ لحاظ کردیم (مشتق گرفتیم)

$$y(x)=c_1\cos(2x)+c_2\sin(2x)+\frac{x^3}{4}+\frac{3x}{8}-\frac{1}{4}$$

اگه $R(x)=e^{ax}$) اگه **a** مخرج رو صفر نکنه، میتونی بزاریش جای **D** و تموم...

مثلا) معادله $y''-2y'+5y=e^{-x}$ رو حل کن.

اول به صورت همگن =>

$$y''-2y'+5y=0 \xrightarrow{\Delta} y_1=e^{x}\cos(2x) \text{ و } y_2=e^{x}\sin(2x)$$

$$(D^2-2D+5)y=e^{-x} \longrightarrow \frac{1}{D^2-2D+5}e^{-x}=y \longrightarrow \frac{1}{(-1)^2-2(-1)+5}e^{-x}=\frac{e^{-x}}{8}=y_p$$

$$y(x)=c_1e^{x}\cos(2x)+c_2e^{x}\sin(2x)+\frac{e^{-x}}{8}$$

اگه $R(x)=bcos(ax)$ یا $R(x)=bsin(ax)$)

سه حالت وجود داره :

اول) اگه عملگر هات همه شون D^2 و عدد باشن و $-a^2$ رو بزاری جاشون مخرج رو صفر نکنه،

پس $-a^2$ رو جای D^2 ها بزار (یه وقت جای D نزاری، سوتی ندی اکسم🤣)

مثلا) معادله $y'' + 4y = cosx$ رو حل کن.

اول به صورت همگن ⇐

$$y''+4y=0 \xrightarrow{\Delta} y_1=\cos 2x \quad \text{و} \quad y_2=\sin(2x)$$

$$(D^2+4)y=\cos x \to \frac{1}{D^2+4}\cos x = y \to \frac{1}{(-1^2)+4}\cos x = \frac{\cos x}{3} = y_p$$

$$y(x)=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x+\frac{\cos x}{3}$$

دوم) اگه عملگر هات همه شون D^2 و عدد باشن و $-a^2$ رو بزاری جاشون مخرج رو صفر کنه،

این حرکت رو میزنی :

$$\frac{1}{D^2+a^2}COS(ax)=\frac{x}{2a}SIN(ax)$$

$$\frac{1}{D^2+a^2}SIN(ax)=-\frac{x}{2a}COS(ax)$$

مثلا) اینو ببین👈 $y'' + 9y = \cos(3x)$

اول به صورت همگن ⇐

$$y''+9y=0 \xrightarrow{\Delta} y_1=\cos(3x) \quad \text{و} \quad y_2=\sin(3x)$$

$$(D^2+9)y=\cos(3x) \to \frac{1}{D^2+9}\cos(3x)=y \longrightarrow$$ اگه -3^2 رو جای D^2 بزاریم مخرج صفر میشه

س$_c$ ⇐ $$\frac{1}{D^2+3}(\cos(3x))=\frac{x}{6}\sin(3x)$$

$$y(x)=c_1\cos(3x)+c_2\sin(3x)+\frac{x}{6}\sin(3x)$$

سوم) اگه اصلا تابعی از D^2 نباشه (مثلا داخلش D هم داشته باشه)

تابع سینوس یا کسینوس رو به **حالت اویلر** تبدیلش می‌کنیم و مثل حالتی که $R(x) = e^{ax}$ حلش می‌کنیم.

مثلا) اینو داشته باش $y'' - 3y' + 2y = 3sin2x$

اول به صورت همگن <= $y'' - 3y' + 2y = 0 \xrightarrow{\Delta} y_1 = e^{x}$ و $y_2 = e^{2x}$

$$(D^2 - 3D + 2)y = 3\sin 2x \longrightarrow \frac{1}{D^2-3D+2}(3\sin 2x) = y$$

چون این سینوس عددش رو در تابعی می‌زاریم که تابعی از D^2 نیست یعنی وجود نداره، پس ما قسمت مجازی‌شو می‌خوایم ← $\sin 2x = e^{2ix}$

$$\frac{3}{D^2-3D+2}e^{2ix} = \frac{3}{(2i)^2-3(2i)+2}e^{2ix} = \frac{3}{-2-6i}e^{2ix} \xrightarrow[\text{مخرج}]{\text{گویا کردن}} -\frac{3(1-3i)}{20}e^{2ix}$$

$$= \frac{-3}{20}(1-3i)\underbrace{(\cos 2x + i\sin 2x)}_{\text{چون } e^{2ix}} = \frac{-3}{20}\left((\cos 2x + 3\sin 2x) + i(\sin 2x - 3\cos 2x)\right)$$

قسمت مجازی $\Rightarrow \frac{3}{20}(3\cos 2x - \sin 2x)$

$$y(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x} + \frac{3}{20}(3\cos 2x - \sin 2x)$$

بعد از خوندن هر قسمت، جون عشقت برو سوال حل کن😀

هر سوال و ابهامی هم داشتی با آیدی صفحه اول در میون بزار🤔

رفیق این نسخه از جزوه به دلیل حجم بالا، شامل تمام مطالب نمیشه...

سعی کن از سوالات آسون شروع کنی و تا مسلط نشدی، **سوال سخت ممنوع** 😡🚫

اگه برات مفید بود حتما با دوستات به اشتراک بزار

دانلود نسخه PDF همین جزوه 👇

SCAN ME